

## Feuille TD 5

**Exercice 1.** Soient  $U \subset \mathbb{C}$  un ouvert contenant  $\overline{D(0,1)}$  et  $f$  une fonction holomorphe dans  $U$ . Pour  $t \in [0, 2\pi]$ , on pose  $\gamma(t) = e^{it}$ .

(1) Calculer les intégrales :

$$I_1 = \int_{\gamma} \left[ 2 + z + \frac{1}{z} \right] \frac{f(z)}{z} dz, \quad I_2 = \int_{\gamma} \left[ 2 - z - \frac{1}{z} \right] \frac{f(z)}{z} dz.$$

(2) En déduire la valeur de :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it} \cos^2 \frac{t}{2}) dz, \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it} \sin^2 \frac{t}{2}) dz.$$

(3) Pour  $|a| \neq 1$ , évaluer :

$$I(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{f(z)}}{z - a} dz.$$

**Exercice 2.** Soit  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une fonction holomorphe dans le disque unité  $D(0,1)$  telle que  $|f(z)|(1 - |z|) \leq 1$  pour tout  $t \in D(0,1)$ . Prouver, pour  $n \geq 1$  :

$$|a_n| \leq \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n (n+1) < e(n+1).$$

**Exercice 3.** *Théorème des trois cercles d'Hadamard.* Soient  $r$  et  $R$  des réels tels que  $0 < r < R$  et  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert. On suppose que  $\Omega$  contient  $C = \{z \in \mathbb{C} \mid r \leq |z| \leq R\}$ . Soit  $f$  une fonction holomorphe dans  $\Omega$ . Pour  $r \leq \rho \leq R$ , on pose :

$$M(\rho) = \sup_{|z|=\rho} |f(z)|.$$

Établir, pour  $r \leq \rho \leq R$  :

$$M(\rho) \leq M(r)^{\frac{\log R - \log \rho}{\log R - \log r}} M(R)^{\frac{\log \rho - \log r}{\log R - \log r}}.$$

*Indication :* on pourra appliquer le principe du maximum à  $z \mapsto z^p(f(z))^q$ , avec  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$ . Ensuite on pourra choisir  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $r^\alpha M(r) = R^\alpha M(R)$  et une suite de rationnels de limite  $\alpha$ .